



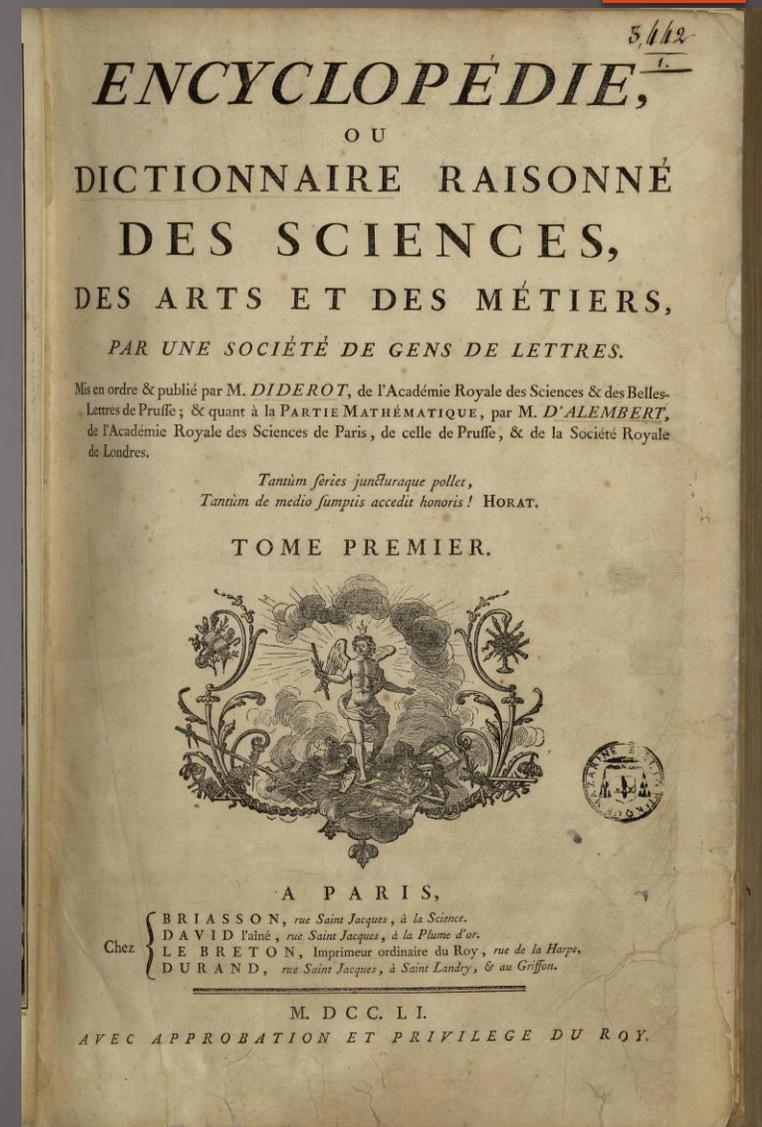
# Il paradosso di Condorcet

Un approccio storico al problema matematico

# Il dibattito illuminista e il « laboratorio de l'Encyclopédie »

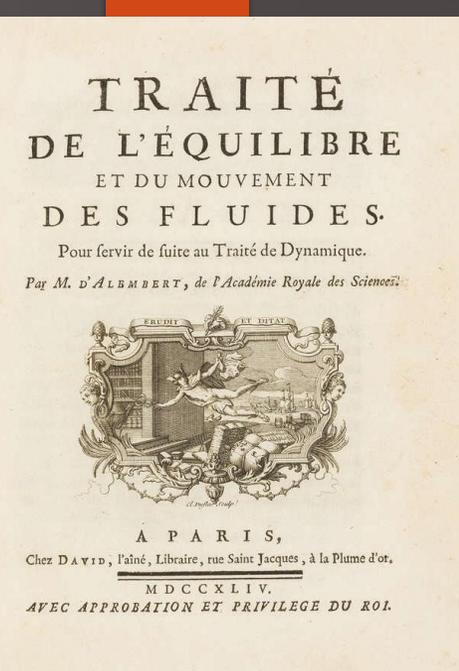
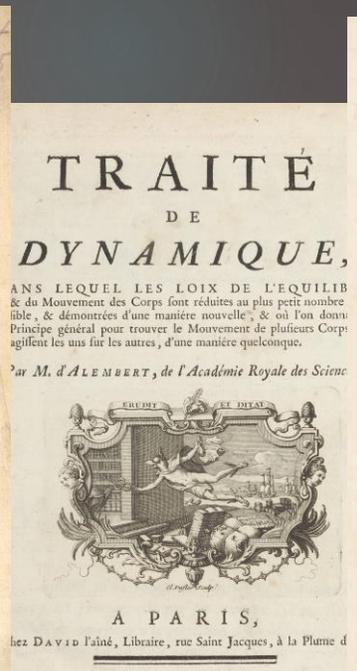
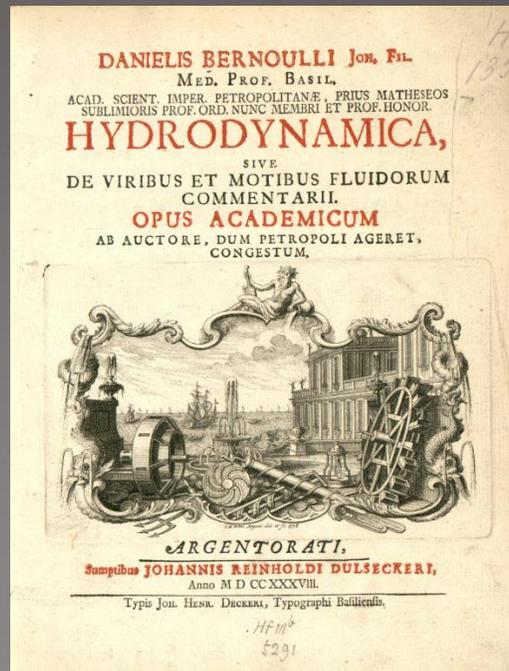


Charles Gabriel Lemonnier, *Salon de Madame Geoffrin*, 1812

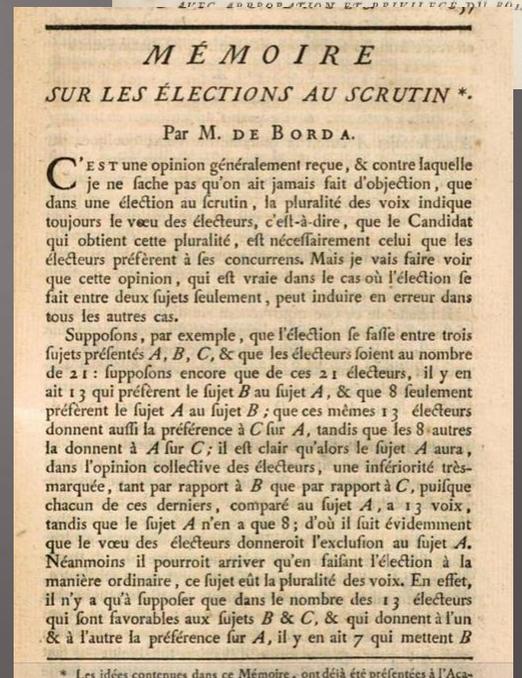
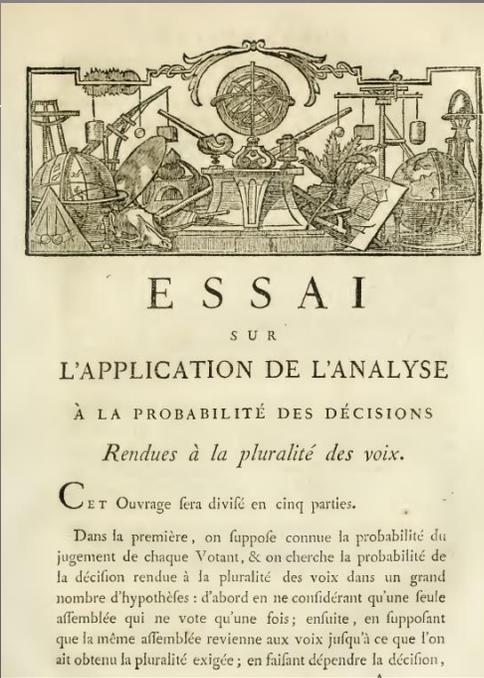


# Le matematiche «miste»

- Descrizione e interpretazione di fenomeni fisici



- Matematica sociale e calcolo delle probabilità



# M É M O I R E

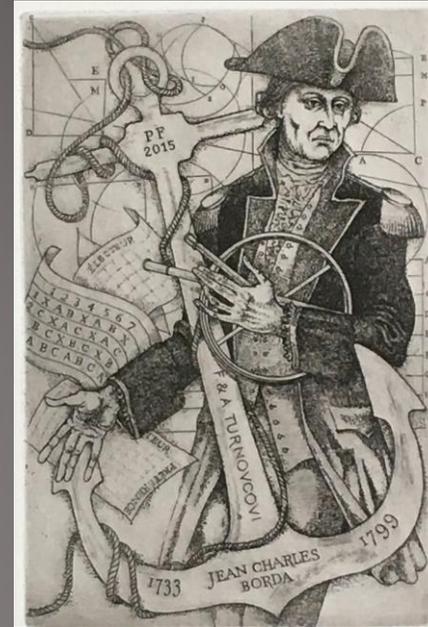
## SUR LES ÉLECTIONS AU SCRUTIN \*.

Par M. DE BORDA.

C'EST une opinion généralement reçue, & contre laquelle je ne sache pas qu'on ait jamais fait d'objection, que dans une élection au scrutin, la pluralité des voix indique toujours le vœu des électeurs, c'est-à-dire, que le Candidat qui obtient cette pluralité, est nécessairement celui que les électeurs préfèrent à ses concurrents. Mais je vais faire voir que cette opinion, qui est vraie dans le cas où l'élection se fait entre deux sujets seulement, peut induire en erreur dans tous les autres cas.

Supposons, par exemple, que l'élection se fasse entre trois sujets présentés *A*, *B*, *C*, & que les électeurs soient au nombre de 21 : supposons encore que de ces 21 électeurs, il y en ait 13 qui préfèrent le sujet *B* au sujet *A*, & que 8 seulement préfèrent le sujet *A* au sujet *B* ; que ces mêmes 13 électeurs donnent aussi la préférence à *C* sur *A*, tandis que les 8 autres la donnent à *A* sur *C* ; il est clair qu'alors le sujet *A* aura, dans l'opinion collective des électeurs, une infériorité très-marquée, tant par rapport à *B* que par rapport à *C*, puisque chacun de ces derniers, comparé au sujet *A*, a 13 voix, tandis que le sujet *A* n'en a que 8 ; d'où il suit évidemment que le vœu des électeurs donneroit l'exclusion au sujet *A*. Néanmoins il pourroit arriver qu'en faisant l'élection à la manière ordinaire, ce sujet eût la pluralité des voix. En effet, il n'y a qu'à supposer que dans le nombre des 13 électeurs qui sont favorables aux sujets *B* & *C*, & qui donnent à l'un & à l'autre la préférence sur *A*, il y en ait 7 qui mettent *B*

\* Les idées contenues dans ce Mémoire, ont déjà été présentées à l'Académie.



Jean-Charles de Borda  
(1733-1799)

*È opinione generalmente accettata, e contro la quale non so se sia mai stata sollevata alcuna obiezione, che in un'elezione a scrutinio, la pluralità dei voti indichi sempre la volontà degli elettori, cioè che il Candidato che ottiene questa pluralità, è necessariamente quello che gli elettori preferiscono ai suoi concorrenti. Ma dimostrerò che questa opinione, che è vera nel caso in cui l'elezione è solo tra due candidati, può trarre in inganno in tutti gli altri casi.*

## Elezione per merito

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 8 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 13 &= 37 && \text{voti per A} \\
 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 &= 42 && \text{voti per B} \\
 3 \cdot 6 + 2 \cdot 14 + 1 \cdot 1 &= 47 && \text{voti per C}
 \end{aligned}$$

Con il metodo a maggioranza  
(*élection à la manière ordinaire*)  
si troverebbero:  
8 voti per A  
7 voti per B  
6 voti per C

Donnons un exemple d'une élection de cette espèce ; supposons encore 21 électeurs & trois sujets présentés *A*, *B*, *C*, & soient

*A A A A A A A A B B B B B B C C C C C C*  
*B C C C C C C C C C C C C C B B B B B B*  
*C B B B B B B A A A A A A A A A A A A A A A*,

les 21 billets d'élection. On aura par ce que nous avons dit, la valeur comparative des suffrages en multipliant les premières voix par 3, les secondes voix par 2, & les troisièmes par 1, ce qui donnera les résultats suivans.

$$\text{Suffrages de } A \dots \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ premières voix, multipliées par } 3 = 24 \\ 13 \text{ troisièmes voix, multipliées par } 1 = 13 \end{array} \right\} 37.$$

$$\text{Suffrages de } B \dots \left\{ \begin{array}{l} 7 \text{ premières voix, multipliées par } 3 = 21 \\ 7 \text{ deuxièmes voix, multipliées par } 2 = 14 \\ 7 \text{ troisièmes voix, multipliées par } 1 = 7 \end{array} \right\} 42.$$

$$\text{Suffrages de } C \dots \left\{ \begin{array}{l} 6 \text{ premières voix, multipliées par } 3 = 18 \\ 14 \text{ deuxièmes voix, multipliées par } 2 = 28 \\ 1 \text{ troisième voix, multipliée par } 1 = 1 \end{array} \right\} 47.$$

d'où l'on voit que la supériorité des suffrages seroit en faveur du sujet *C*, que la seconde place seroit donnée au sujet *B*, & la dernière au sujet *A*.

Il est à remarquer que si on avoit fait l'élection à la manière ordinaire, on auroit eu le résultat suivant,

8 voix pour *A*,  
7 voix pour *B*,  
6 voix pour *C*,

## Metodo delle elezioni speciali (*elections particulières*)

Supposons maintenant qu'on veuille employer la méthode des élections particulières, & qu'il y ait également trois sujets présentés *A, B, C*; comme on peut combiner ces trois sujets pris deux à deux de trois manières différentes, il faudra faire trois élections particulières. Soient les résultats de ces élections comme il suit.

$$\begin{aligned} 1.^{\text{e}} \text{ élection entre } A \ \& \ B \dots & \begin{cases} a \text{ voix pour } A, \\ b \text{ voix pour } B, \end{cases} \\ 2.^{\text{e}} \text{ élection entre } A \ \& \ C \dots & \begin{cases} a' \text{ voix pour } A, \\ c \text{ voix pour } C, \end{cases} \\ 3.^{\text{e}} \text{ élection entre } B \ \& \ C \dots & \begin{cases} b' \text{ voix pour } B, \\ c' \text{ voix pour } C, \end{cases} \end{aligned}$$

Si on détermine les valeurs de  $a, a', b, b', c, c'$ , d'après la supposition que les élections particulières soient le résultat de l'élection par ordre de mérite qu'on a rapportée ci-dessus, on trouvera

$$\begin{aligned} a &= 8, & b &= 13, & c &= 13, \\ a' &= 8, & b' &= 13, & c' &= 13; \end{aligned}$$

& par conséquent, on aura

$$\begin{aligned} \text{les suffrages de } A \text{ ou } a + a' &= 16, \\ \text{les suffrages de } B \text{ ou } b + b' &= 12, \\ \text{les suffrages de } C \text{ ou } c + c' &= 26; \end{aligned}$$

ce qui donne entre les trois suffrages, les mêmes différences qui avoient été trouvées par la première espèce d'élection.

*Supponiamo ora di voler usare il metodo delle elezioni speciali e che ci siano sempre tre soggetti A B C; siccome si possono combinare questi tre soggetti presi due a due in tre diverse maniere, sarà necessario avere tre elezioni speciali.*

*Se si determinano i valori di  $a, a', b, b', c, c'$  nell'ipotesi che le elezioni speciali siano il risultato dell'elezione per ordine di merito riportata sopra, si trova*

*La seconda forma di elezione sarebbe complicata, quando si presenta un gran numero di candidati, perché il numero di elezioni particolari necessario per completare, sarebbe grande. Per questo motivo si dovrebbe preferire l'elezione in ordine di merito, che è molto più efficiente.*

## Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet (1743-1794)

1754-1758. Collège de Jesuits (Reims)

1758-1760. Collège de Navarre, poi Collège Mazarin (Parigi).

1765. *Essai sur le calcul intégral*, sottomesso all'Académie des Sciences.

1769. Nominato *adjoint mécanicien* dell'Académie des Sciences.

Inizia a frequentare il salotto di M.lle Lespinasse (D'Alembert, Turgot, ...).

1772. Inizia a collaborare al *Supplément de l'Encyclopédie*.

Dal 1775. Nominato Ispettore Generale della Zecca.

1775-1776. Fa parte della Commissione per la navigazione interna sul Canale di Piccardia, insieme a D'Alembert e Bossut.

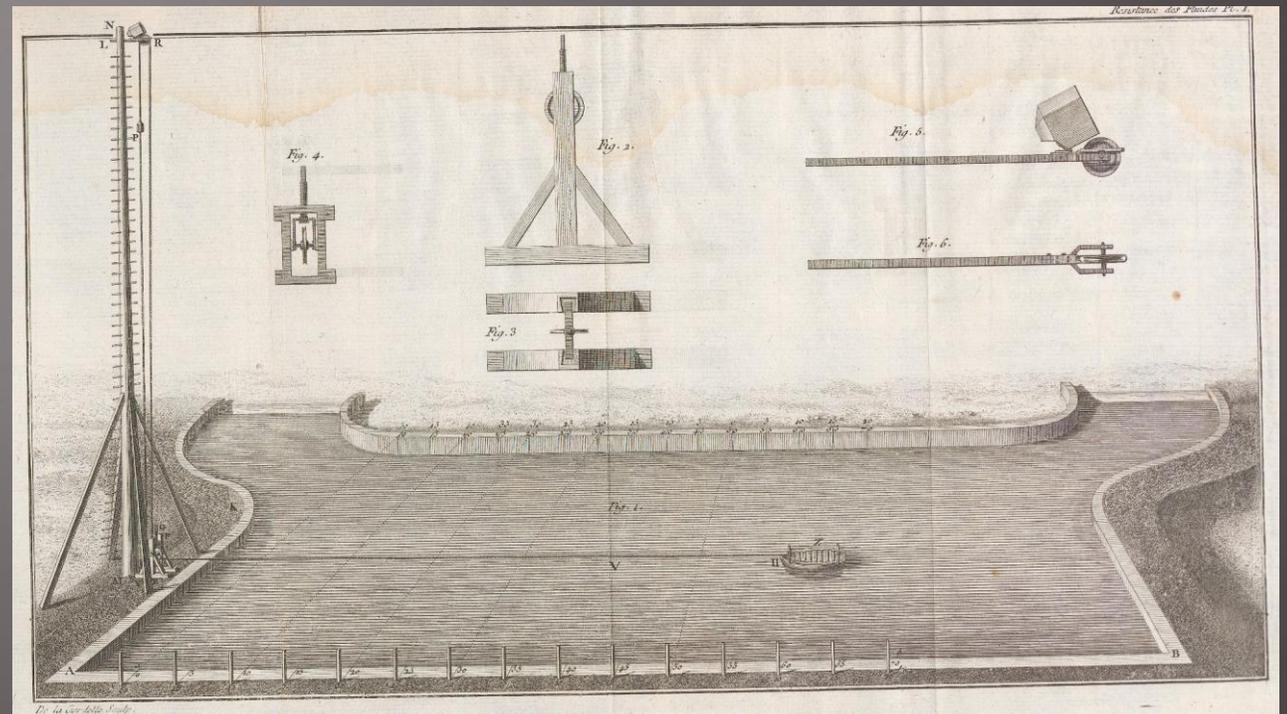


## La Commission de navigation intérieure (D'Alembert, Bossut & Condorcet)

[...] *Mais la théorie des fluides est trop peu avancée pour résoudre le problème général, et dans chaque cas particulier, il ne peut être bien résolu qu'après avoir fait des expériences. Tout mécanicien qui s'est occupé d'hydraulique n'est pas en état de le faire, il faut dans ce genre un homme qui réunisse la théorie à la pratique, et qui soit en état de décomposer ces problèmes qui sont très compliqués, d'examiner par la voie de l'expérience chaque cause séparément, et M. l'abbé Bossut a fait sur l'hydraulique un livre à la fois très savant et plein d'expériences. [...] il regarde ce voyage non seulement comme utile au canal de Picardie mais comme pouvant le devenir à l'hydraulique en général. Cette science a été peu cultivée en France. Maintenant on l'a abandonnée aux ingénieurs des ponts et chaussées, en Italie au contraire elle a été confiée constamment aux savans les plus célèbres.*

Lettera di Condorcet a Turgot, 1774

Charles Bossut, *Nouvelles expériences sur la résistance des fluides* (1777)



## Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet (1743-1794)

1754-1758. Collège de Jesuits (Reims)

1758-1760. Collège de Navarre, poi Collège Mazarin (Parigi).

1765. *Essai sur le calcul intégral*, sottomesso all'Académie des Sciences.

1769. Nominato *adjoint mécanicien* dell'Académie des Sciences.

Inizia a frequentare il salotto di M.lle Lespinasse (D'Alembert, Turgot, ...).

1772. Inizia a collaborare al *Supplément de l'Encyclopédie*.

Dal 1775. Nominato Ispettore Generale della Zecca.

1775-1776. Fa parte della Commissione per la navigazione interna sul Canale di Piccardia, insieme a D'Alembert e Bossut.

1776. Nominato segretario perpetuo dell'Académie des Sciences.

1785. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*.

26 settembre 1791. Eletto come delegato rappresentante di Parigi nell'Assemblea Legislativa. Compila il celebre *Rapport sur l'instruction publique*.

1792. Delegato alla Convenzione Nazionale.

27 marzo 1794. Arrestato e incarcerato.



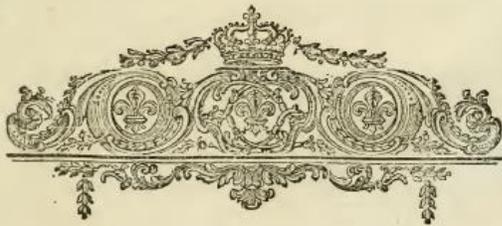
lat Fr  
246e

ESSAI  
SUR L'APPLICATION  
DE L'ANALYSE  
À LA  
PROBABILITÉ  
DES DÉCISIONS

Rendues à la pluralité des voix.

Par M. LE MARQUIS DE CONDORCET, Secrétaire perpétuel  
de l'Académie des Sciences, de l'Académie Française, de  
l'Institut de Bologne, des Académies de Pétersbourg, de  
Turin, de Philadelphie & de Padoue.

Quòd si deficiant vires audacia certè  
Laus erit, in magnis & voluisse fat e&.



A PARIS,  
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXV.

47534  
23/2 00

*Le verità delle scienze morali e politiche sono suscettibili della stessa certezza di quelle che formano il sistema delle scienze fisiche, e anche dei rami di queste scienze che, come l'astronomia, sembrano avvicinarsi alla certezza matematica.*

*Fu per lui [M. Turgot] che intrapresi questo lavoro, dove sottomettendo al calcolo domande interessanti per l'utilità comune, cercai di dimostrare [...] questa opinione che egli avrebbe voluto condividere con tutti coloro che amano la verità.*

*Questo Saggio sarebbe di utilità molto limitata se servisse solo ai geometri, i quali del resto forse non troverebbero nei metodi di calcolo nulla che possa meritare la loro attenzione.*

*Discours préliminaire, pp. i-ii*

## Esempio di elezione fra 3 candidati A, B, C

Il est clair d'abord que celui qui donne sa voix pour A, prononce les deux propositions,

A vaut mieux que B,

A vaut mieux que C;

celui qui vote pour B, les deux propositions,

B vaut mieux que A,

B vaut mieux que C;

celui qui vote pour C, les deux propositions,

C vaut mieux que A,

C vaut mieux que B.

Nous avons donc ici trois systèmes de propositions contradictoires.

A, A vaut mieux que B,

N, B vaut mieux que A,

a, A vaut mieux que C,

n, C vaut mieux que A,

α, B vaut mieux que C,

ν, C vaut mieux que B;

ce qui produit huit combinaisons mathématiquement possibles.

(I) Aaa, (II) Aav, (III) Ana, (IV) Anv,

(V) Naa, (VI) Nav, (VII) Nna, (VIII) Nnv.

$A > B,$

$A > C$

$B > A,$

$B > C$

$C > A,$

$C > B$

3 proposizioni  $\mathcal{A} a \alpha$  + 3 proposizioni contrarie  $\mathcal{N} n \nu$

8 possibili combinazioni matematiche

(I)  $\mathcal{A} a \alpha \Rightarrow A > B, A > C, B > C \Rightarrow \mathbf{A} > B > C$

(II)  $\mathcal{A} a \nu \Rightarrow A > B, A > C, C > B \Rightarrow \mathbf{A} > C > B$

(III)  $\mathcal{A} n \alpha \Rightarrow A > B, C > A, B > C \Rightarrow$  contraddizione

(IV)  $\mathcal{A} n \nu \Rightarrow A > B, C > A, C > B \Rightarrow \mathbf{C} > A > B$

(V)  $\mathcal{N} a \alpha \Rightarrow B > A, A > C, B > C \Rightarrow \mathbf{B} > A > C$

(VI)  $\mathcal{N} a \nu \Rightarrow B > A, A > C, C > B \Rightarrow$  contraddizione

(VII)  $\mathcal{N} n \alpha \Rightarrow B > A, C > A, B > C \Rightarrow \mathbf{B} > C > A$

(VIII)  $\mathcal{N} n \nu \Rightarrow B > A, C > A, C > B \Rightarrow \mathbf{C} > B > A$

[Essai, pp. lvi-lviii]

*“Il metodo usato nelle elezioni ordinarie è difettoso. Ogni votante è limitato a nominare l’unico che preferisce: allora nell’esempio dei candidati, qualcuno che vota per A non esprime la sua visione sulla preferenza tra B e C e allo stesso modo per gli altri. Tuttavia può risultare da questo modo di votare una decisione che è alla fine contraria alla maggioranza” [Essai, p. lviii]*

Cela posé , il est aisé de voir d’abord que la manière employée dans les élections ordinaires est défectueuse. En effet , chaque Votant se borne à nommer celui qu’il préfère : ainsi dans l’exemple de trois Candidats, celui qui vote pour A, n’énonce pas son vœu sur la préférence entre B & C, & ainsi des autres. Or, il peut résulter de cette manière de voter une décision réellement contraire à la pluralité.

*Supponiamo 60 votanti, di cui 23 a favore di A, 19 a favore di B e 18 a favore di C. Supponiamo poi che i 23 voti di A siano unanimemente decisi per C rispetto a B, che i 19 voti per B siano decisi per C rispetto ad A e che dei 18 voti per C, 16 preferiscano B ad A e solo 2 preferiscano A a B.*

*Si avrebbe dunque*

*1° 35 voti per B che è meglio di A e 25 per la proposizione contraria [proposition contradictoire].*

*2° 37 voti per C che è meglio di A, e 23 per la proposizione contraria.*

*3° 41 voti per C che è meglio di B e 19 per la proposizione contraria.*

N° di preferenze	Ordine di preferenza
23	A C B
19	B C A
16	C B A
2	C A B

$B > A$  per  $19 + 16 = 35$   
 $C > A$  per  $19 + 16 + 2 = 37$   
 $C > B$  per  $23 + 16 + 2 = 41$

$A > B$  per  $23 + 2 = 25$   
 $A > C$  per 23  
 $B > C$  per 19

*Avremmo dunque il sistema di tre proposizioni che hanno la maggioranza, formato da tre proposizioni.*

- *B è meglio di A*
- *C è meglio di A*
- *C è meglio di B,*

*che implica un voto a favore di C.*

*Dunque l'unico tra i candidati che avrebbe davvero la preferenza della maggioranza, sarebbe quello che, seguendo il metodo ordinario, avrebbe il numero minore di voti.*

*Dunque A che, seguendo il metodo ordinario, avrebbe la maggioranza di voti, risulta essere al contrario quello più lontano dall'essere la volontà della maggioranza. [Essai, p. lix-lx]*

N° di preferenze	Ordine di preferenza
23	A C B
19	B C A
16	C B A
2	C A B

A vincerebbe l'elezione con il metodo a maggioranza, poiché A ha più voti al primo posto rispetto agli altri due candidati, ma in realtà C vincerebbe poiché C è preferito in ogni confronto testa a testa contro gli altri candidati.

*Si dovrebbe in generale sostituire a questa modalità di elezione quella in cui ogni elettore, esprimendo l'ordine secondo cui colloca i candidati, pronuncerebbe allo stesso tempo la preferenza che accorderebbe a ciascuno. [Essai, p. lx]*

Méthode qu'il faut y substituer. Ainsi l'on devrait en général substituer à cette forme celle dans laquelle chaque Votant, exprimant l'ordre suivant lequel il place les Candidats, prononceroit à la fois sur la préférence respective qu'il leur accorde.

*Supponiamo che nell'esempio mostrato, dove ci sono 23 voti per A, 19 per B e 18 per C, i 23 voti per A siano favorevoli a B rispetto che a C. La proposizione B è meglio di C avrà la maggioranza di 42 voti contro 18.*

*Supponiamo ora che dei 19 voti a favore di B, ci siano 17 per B è meglio di C e 2 per il contrario; questa proposizione C è meglio di A avrà la maggioranza di 35 voti contro 25. Supponiamo infine che dei 18 voti per C, 10 siano per A è meglio di B e 8 per la proposizione contraria, avremo la maggioranza di 33 voti contro 27 a favore di A è meglio di B. Il sistema che ottiene la maggioranza sarà composto di tre proposizioni:*

*A è meglio di B,  
C è meglio di A,  
B è meglio di C.*

*Questo sistema è il terzo [(III)  $A > B, C > A, B > C \Rightarrow$  caso ciclico], ossia uno dei due possibili sistemi che implica contraddizione. [Essai, p. lxi]*

N° di preferenze	Ordine di preferenza
23	A B C
17	B C A
2	B A C
10	C A B
8	C B A

On ne trouve ici qu'un essai très-imparfait de la théorie des décisions rendues sur des propositions compliquées, & de celle des élections: il en résulte que pour réunir les deux conditions essentielles à toute décision, la probabilité d'avoir une décision, & celle que la décision obtenue sera vraie,

*Si trova qui un saggio assai imperfetto della teoria delle decisioni rese su proposizioni complicate e di quella delle elezioni: ne risulta che per riunire le due condizioni essenziali ad ogni decisione, la probabilità di avere una decisione e quella che la decisione ottenuta sarà vera, bisogna*

*1° nel caso di decisioni su questioni complicate fare in modo che il sistema di proposizioni semplici che li formano sia rigorosamente sviluppato, che ogni parere possibile sia ben esposto, che il voto di ciascun votante sia preso su ciascuna delle proposizioni che formano questo parere e non sul solo risultato. La maniera di proporre la questione da decidere è dunque molto importante, la funzione di stabilire questa questione è dunque una delle funzioni più delicate e più difficili che il Corpo [Organo], incaricato di decidere, o quelli che lo hanno stabilito, possano affidare. Tuttavia presso gli Antichi e anche i Moderni, è stata quasi ovunque abbandonata al caso o data come un potere, un diritto legato ad una dignità [privilegio] e non imposta come un dovere che esige sagacità e giustizia. [Essai, p. lxxix]*

2°. *Gli Elettori devono essere illuminati, e tanto più illuminati, in quanto le questioni che decidono sono più complicate; senza quella si troverà una forma di decisione che preserverà dalla paura di una decisione sbagliata, ma che allo stesso tempo rendendo ogni decisione quasi impossibile, non sarà che un mezzo di perpetuare abusi e leggi malvage.*

2.° Il faut de plus que les Votans soient éclairés, & d'autant plus éclairés, que les questions qu'ils décident sont plus compliquées; sans cela on trouvera bien une forme de décision

*Così la forma delle assemblee che decidono il destino degli uomini, è molto meno importante per la loro felicità della conoscenza di coloro che le compongono: & il progresso della ragione contribuirà più al bene dei popoli che la forma delle costituzioni politiche. [Essai, pp. lxix-lxx]*

Ainsi la forme des assemblées qui décident du sort des hommes, est bien moins importante pour leur bonheur que les lumières de ceux qui les composent : & les progrès de la raison contribueront plus au bien des Peuples que la forme des constitutions politiques.

## Parere di Condorcet sul metodo di Borda

Un Géomètre célèbre, qui a observé avant nous les inconvéniens des élections ordinaires, a proposé une méthode, qui consiste à faire donner à chaque Votant l'ordre dans lequel il place les candidats; à donner ensuite à chaque voix en faveur du premier, l'unité pour valeur, par exemple; à chaque voix en faveur du second une valeur au-dessous de l'unité; une valeur encore plus petite à chaque voix en faveur du troisième, & ainsi de suite, & de choisir ensuite celui des candidats pour qui la somme de ces valeurs, prises pour tous les Votans, seroit la plus grande.

Cette méthode a l'avantage d'être très-simple, & l'on pourroit sans doute, en déterminant la loi des décroissemens de ces valeurs, éviter en grande partie l'inconvénient qu'a la méthode ordinaire, de donner pour la décision de la pluralité une décision qui y est réellement contraire: mais cette méthode n'est pas rigoureusement à l'abri de cet inconvénient.

*Un celebre Geometra, che ha osservato prima di noi l'inconveniente delle elezioni ordinarie, ha proposto un metodo, che consiste nel far dare a ciascun Votante l'ordine in cui classifica i candidati; di dare poi ad ogni primo voto il valore dell'unità, per esempio; ad ogni secondo classificato un valore inferiore all'unità; un valore ancora più piccolo per ogni voto del terzo posto, e così via, e di scegliere poi il candidato per il quale la somma di questi valori, presa tra tutti i votanti, sarà la più grande.[Essai, p. clxxvij.]*



**« Une bonne loi doit être bonne pour tous les hommes,  
comme une proposition vraie est vraie pour tous »**

Condorcet, *Observations sur le vingt-neuvième livre de L'Esprit des lois* (1780)

## Bibliografia e sitografia

Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendus à la pluralité des voix*, 1785  
[<https://archive.org/details/essaisurlapplica00cond/page/n5/mode/2up>]

*Condorcet, mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, Minerve, 1989

*Condorcet, Le Condor des Lumières*, Lekton, vol. III, n. 1, 1993.

<https://www.inventaire-condorcet.com/home>